



Probabilidades e Estatística 2004/05

Dois exercícios resolvidos do capítulo 8

LEIC, LERCI, LEE

A23. Um fabricante de máquinas de calcular afirma que no máximo 1% da sua produção é defeituosa. Numa amostra aleatória de 1000 calculadoras verificou-se que 12 eram defeituosas.

- (a) Teste a um nível de significância de 5% a hipótese colocada pelo fabricante.
- (b) Determine o valor-p para o teste da alínea anterior.
- (c) Que dimensão mínima deveria ter a amostra se houver de facto 2% de calculadoras defeituosas, de modo que a probabilidade do erro de tipo II não exceda 5%? (*Exame 29 Jun 2000*)

Resolução: seja X_i a v.a. que toma o valor 1 se a i -ésima máquina de calcular for defeituosa, com $X_i \stackrel{\text{iid}}{\sim} \text{Bernoulli}(p)$. Resulta do enunciado que foi recolhida uma amostra de $n = 1000$ calculadoras, para a qual $\bar{x} = \frac{12}{1000} = 0.012$.

- (a) Pretende-se testar $H_0 : p \leq 0.01$ vs $H_1 : p > 0.01$. Para esta situação a estatística de teste é:

$$Z = \frac{\bar{X} - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{1000}}} \approx N(0, 1)$$

uma vez que $n = 1000$ (pelo que estamos nas condições de aplicação do TLC).

Da desigualdade $P(Z > c) = 0.05$ vem que $c \approx 1.65$, donde a região crítica para $\alpha = 5\%$ é (aproximadamente) da forma:

$$Z > 1.65.$$

Uma vez que $z_{obs} = \frac{\bar{x} - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{1000}}} = 0.64 < 1.65$ não há evidências, para $\alpha \leq 5\%$, para rejeitar H_0 , ie., com base nesta amostra não há motivos (para $\alpha \leq 5\%$) para discordar da afirmação do fabricante.

(b) O valor- p é dado por:

$$p = P(Z > 0.64) \approx 1 - \Phi(0.64) = 1 - 0.7389 = 0.2611$$

i.e., H_0 só deve ser rejeitada para $\alpha \geq 26.11\%$ (i.e., H_0 não deverá ser rejeitada para os níveis usuais de significância).

(c) A probabilidade de erro tipo II é dada por:

$$P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa})$$

Note-se que

$$\begin{aligned} P(\text{aceitar } H_0 | H_0 \text{ é falsa}) &= P\left(\frac{\bar{X} - 0.01}{\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{n}}} < 1.65 | p = 0.02\right) \\ &= P\left(\bar{X} < 0.01 + 1.65\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{n}} | p = 0.02\right) \\ &= P\left(\frac{\bar{X} - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{n}}} < \frac{0.01 + 1.65\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{n}} - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{n}}} | p = 0.02\right) \\ &\approx \Phi\left(\frac{0.01 + 1.65\sqrt{\frac{0.01 \times 0.99}{n}} - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02 \times 0.98}{n}}}\right) \\ &= \Phi(-0.07\sqrt{n} + 1.17) \leq 0.05 = \Phi(-1.65) \end{aligned}$$

donde $n \geq 1623$.

8.22 A altura, em metros, dos indivíduos de determinada população é uma variável aleatória X . Escolhidos aleatoriamente 100 desses indivíduos e medidas as suas alturas obtiveram-se os seguintes resultados:

Classes	F_i^0
[1.595, 1.625[	5
[1.625, 1.655[	18
[1.655, 1.685[	42
[1.685, 1.715[	27
[1.715, 1.745[	8

- (a) Teste o ajustamento da distribuição normal com valor esperado 1.675 e variância 0.029^2 .
- (b) Teste ao nível de significância de 1%, a hipótese H_0 : “ X é uma variável aleatória com distribuição normal” contra todas as alternativas.

Resolução:

- (a) Nesta alínea pretende-se testar $H_0 : X \sim N(1.675, 0.029^2)$ contra $H_1 : X \sim$ outra distribuição.

Sob validade de H_0 as frequências esperadas de cada uma das classes são dadas por:

Classes	o_i	e_i
$[-\infty, 1.625[$	5	$100\Phi(\frac{1.625-1.675}{0.029}) = 100\Phi(-1.72) = 100(1 - 0.9573) = 4.27$
$[1.625, 1.655[$	18	$100 [\Phi(\frac{1.655-1.675}{0.029}) - \Phi(\frac{1.625-1.675}{0.029})] = 100 [\Phi(-0.69) - \Phi(-1.72)] = 20.24$
$[1.655, 1.685[$	42	$100 [\Phi(\frac{1.685-1.675}{0.029}) - \Phi(\frac{1.655-1.675}{0.029})] = 100 [\Phi(0.35) - \Phi(-0.69)] = 39.17$
$[1.685, 1.715[$	27	$100 [\Phi(\frac{1.715-1.675}{0.029}) - \Phi(\frac{1.685-1.675}{0.029})] = 100 [\Phi(1.38) - \Phi(0.35)] = 27.94$
$[1.715, \infty[$	8	$100 [1 - \Phi(\frac{1.655-1.675}{0.029})] = 100 [1 - \Phi(1.38)] = 8.38$

Note-se que tanto a primeira classe como a última são abertas porque se X efectivamente tiver distribuição normal, toma valores em $\mathbb{R}$. Apesar da primeira classe ter frequência inferior a 5, como é muito próxima de 5 não vamos agrupar a primeira com a segunda.

Dado que a estatística de teste é da forma $\sum_{i=1}^5 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx \chi_{(4)}^2$, vem que o valor observado da estatística de teste é dado por 0.626, pelo que o valor p correspondente é aproximadamente $1 - F_{\chi_{(4)}^2}(0.626) \in (0.95; 0.975)$. Concomitantemente a hipótese H_0 não é rejeitada para os níveis usuais de significância.

- (b) Nesta alínea pretende-se testar $H_0 : X \sim N(\mu, \sigma^2)$ versus $H_1 : X \sim$ outra distribuição.

Dado que os parâmetros não são indicados, ter-se-à que estimá-los, via método da máxima verosimilhança. Pode-se provar (prove-o!) que:

$$emv(\mu) = \bar{x} = \sum_{i=1}^5 c_i \frac{o_i}{100} \quad emv(\sigma^2) = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 c_i^2 \frac{o_i}{100} - 100 (\bar{x})^2}{99}$$

(as fórmulas anteriores foram apresentadas no Capítulo 1, sobre o tema da Estatística Descritiva) pelo que

$$emv(\mu) = \frac{1.61 \times 5 + 1.64 \times 18 + \dots + 1.73 \times 8}{100} = 1.6745$$

e

$$emv(\sigma^2) = \frac{\frac{1.61^2 \times 5 + 1.64^2 \times 18 + \dots + 1.73^2 \times 8}{100} - 100 \times 1.6745^2}{99} = 0.0009$$

pelo que pelo princípio de invariância dos estimadores de máxima verosimilhança:

Classes	o_i	$\hat{e}_i$
$[-\infty, 1.625[$	5	$100\Phi(\frac{1.625-1.6745}{0.03}) = 100\Phi(-1.65) = 100(1 - 0.9505) = 4.05$
$[1.625, 1.655[$	18	$100 [\Phi(\frac{1.655-1.6745}{0.03}) - \Phi(\frac{1.625-1.6745}{0.03})] = 100 [\Phi(-0.65) - \Phi(-1.65)] = 21.78$
$[1.655, 1.685[$	42	$100 [\Phi(\frac{1.685-1.6745}{0.03}) - \Phi(\frac{1.655-1.6745}{0.03})] = 100 [\Phi(0.35) - \Phi(-0.65)] = 39.09$
$[1.685, 1.715[$	27	$100 [\Phi(\frac{1.715-1.6745}{0.03}) - \Phi(\frac{1.685-1.6745}{0.03})] = 100 [\Phi(1.35) - \Phi(0.35)] = 27.47$
$[1.715, \infty[$	8	$100 [1 - \Phi(\frac{1.655-1.6745}{0.03})] = 100 [1 - \Phi(1.35)] = 7.7$

Como a primeira frequência é menor que 5, neste caso vamos colapsar as duas primeiras classes, donde resulta a seguinte tabela:

Classes	o_i	$\hat{e}_i$
$[-\infty, 1.655[$	23	21.78
$[1.655, 1.685[$	42	39.09
$[1.685, 1.715[$	27	27.47
$[1.715, \infty[$	8	7.7

Dado que a estatística de teste é da forma $\sum_{i=1}^4 \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i} \approx \chi_{(2)}^2$, vem que o valor observado da estatística de teste é dado por 0.305, pelo que dado que o quantil de ordem 0.99 de uma $\chi_{(2)}^2$ é igual a 9.21, então para $\alpha = 1\%$ não há evidências para rejeitar H_0 .